Correction du devoir surveillé $n°5$

Problème A :

On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $4x - 2y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u_0)$ avec $u_0 = (1,1,1)$.

1. On a : $F \subset \mathbb{R}^3$, $4 \times 0 - 2 \times 0 - 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ et pour tout $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in F$,
$4(x_1 + \lambda x_2) - 2(y_1 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) = 4x_1 - 2y_1 - z_1 + \lambda(4x_2 - 2y_2 - z_2) = 0.$ /1
Par conséquent $(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \in F$. On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 4x - 2y\} = \{x(1,0,4) + y(0,1,-2), x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,0,4),(0,1,-2))$.
La famille $((1,0,4),(0,1,-2))$ est libre et génératrice de F, c'est dont une base de F. /1
3. L'espace G est défini comme le plus petit sous-espace vectoriel engendré par $u_0 \in \mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, comme $G = \text{Vect}(u_0)$, la famille $((1,1,1))$ est libre et génératrice de G, c'est donc une base de G. /1
4. Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'inclusion retour est vraie. Soit $(x,y,z) \in F \cap G$. Comme $(x,y,z) \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,1,1)$. De plus, $(x,y,z) \in F$, $4\lambda - 2\lambda - \lambda = 0$ i.e. $\lambda = 0$.
D'où $(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc F et G sont en somme directe. De plus, $\dim(F)+\dim(G) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, d'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. /2

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ une forme linéaire non nulle sur E i.e. $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \backslash \{0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{R})}\}$.

5. L'application φ est non nulle donc il existe $u_1 \in E$ tel que $\varphi(u_1) \neq 0$. Posons $u_0 = \frac{1}{\varphi(u_1)} u_1$.
On a $u_0 \in E$ et $\varphi(u_0) = \frac{1}{\varphi(u_1)} \varphi(u_1) = 1$. /1

On introduit l'application $f : x \mapsto x - \varphi(x).u_0$ définie sur E. /1

6. Soit $x \in E$. Les vecteurs x et u_0 appartiennent à E qui est stable par combinaison linéaire donc $f(x) \in E$.
Soit $x_1, x_2 \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f(x_1 + \lambda x_2) = x_1 + \lambda x_2 + \varphi(x_1 + \lambda x_2) u_0 = x_1 + \varphi(x_1) u_0 + \lambda (y_1 + \lambda y_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$. /1
Donc f un endomorphisme de E.
7. (a) Soit $x \in E$, $f(f(x)) = f(x - \varphi(x).u_0) = f(x) - \varphi(x) f(u_0) = f(x) - \varphi(x) \left(\underbrace{u_0 - \varphi(u_0) u_0}_{=0_E} \right) = f(x)$.
Donc $f \circ f = f$, on en déduit que f est un projecteur. /1
(b) Soit $x \in \text{Ker}(f)$ donc $x = \varphi(x).u_0 \in \text{Vect}(u_0)$. D'où $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(u_0)$. /1
De plus, $f(u_0) = 0_E$ donc $u_0 \in \text{Ker}(f)$ d'où $\text{Vect}(u_0) \subset \text{Ker}(f)$. Conclusion : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_0)$.
(c) Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = x - \varphi(x).u_0$. On remarque que $\varphi(y) = \varphi(x) - \varphi(x).\varphi(u_0) = 0$ donc $y \in \text{Ker}(\varphi)$. Par conséquent, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi)$.
Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$. On remarque que $f(x) = x - \varphi(x).u_0 = x$. Donc $x \in \text{Im}(f)$. D'où $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Im}(f)$.
On vient de montrer par double inclusion que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\varphi)$. /1

On définit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi : (x,y,z) \mapsto 4x - 2y - z$. /1

8. Soit $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\varphi(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) = 4(x_1 + \lambda x_2) - 2(y_1 + \lambda y_2) - (z_1 + \lambda z_2) = 4x_1 - 2y_1 - z_1 + \lambda(4x_2 - 2y_2 - z_2) = \varphi(x_1,y_1,z_1) + \lambda \varphi(x_2,y_2,z_2)$ Donc φ est linéaire et $\varphi(u_0) = 1$.
9. L'application $f : x - \varphi(x).u_0$ est un projecteur sur $\text{Im}(f) = F$ parallèlement à $\text{Ker}(f) = G$. Or les sous-espaces caractéristiques d'un projecteur sont supplémentaires et donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. /1
10. $F = \text{Ker}(\varphi)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. De plus, $G = \text{Vect}(u_0)$ est une droite vectorielle non contenue dans F (car $\varphi(u_0) \neq 0$) donc $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. /1

Problème B :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : x - \ln(x) = n$ et la fonction $f_n : x \mapsto x - \ln(x) - n$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par combinaison linéaire, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = \frac{x-1}{x}$.
Donc f_n est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ et comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ par croissance comparée alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. /2
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n admet un minimum global en 1 qui vaut $1-n$. Par conséquent, la fonction f_0 est minorée par 1 et donc f_0 ne s'annule jamais. L'équation (E_0) n'admet pas de solution. /1
3. La fonction f_1 est minorée par 0 qui est atteint uniquement en 1 donc 1 est l'unique solution de (E_1). /1
4. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. On a $f_n(1) = 1-n < 0$ (donc 1 n'est pas solution de (E_n)), $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. De plus, f_n est continue, strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le corollaire du TVI généralisé, la fonction f_n s'annule une unique fois sur $]0,1[$ et une unique fois sur $]1,+\infty[$. Autrement dit (E_n) admet exactement deux solutions, une dans $]0,1[$ et l'autre dans $]1,+\infty[$. On notera respectivement x_n et y_n ses solutions. /2
5. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. On a $f_n(x_n) = 0$ et $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} - \ln(x_{n+1}) - n = n+1-n = 1$. D'où $f_n(x_n) < f_n(x_{n+1})$. Par l'absurde, si $x_{n+1} < x_n$ alors en utilisant la stricte décroissance de f_n sur $]0,1]$, on trouve $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$. Absurde. Donc $x_{n+1} \leqslant x_n$. /1
6. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Par l'absurde, supposons que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, par passage à limite dans l'égalité $x_n - \ln(x_n) = n$, on trouve $l - \ln(l) = +\infty$ ce qui est absurde. Par conséquent, la suite (x_n) converge vers 0. /1
7. Pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, $x_n - \ln(x_n) = n$ i.e. $\frac{\mathrm{e}^{x_n}}{x_n} = \mathrm{e}^n$ donc $\frac{x_n}{\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^{x_n} \longrightarrow 1$. Donc $x_n \sim e^{-n}$. /1
8. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Par l'absurde, si $y_n < n$ alors en utilisant la stricte croissance de f_n sur $[1,+\infty[$, on trouve $f_n(y_n) < f_n(n)$ i.e. $0 < -\ln(n)$. Absurde. Donc $n \leqslant y_n$ pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$. Par théorème de divergence par minoration, $y_n \longrightarrow +\infty$. /1
9. Pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, $y_n - \ln(y_n) = n$. Comme $y_n \longrightarrow +\infty$, $\frac{n}{y_n} = 1 - \frac{\ln(y_n)}{y_n} \longrightarrow 1$. Donc $y_n \sim n$. /1
10. On a $y_n - n = \ln(y_n) = \ln(n + o(n)) = \ln(n) + \ln(1+o(1)) = \ln(n) + o(1)$. D'où $y_n = n + \ln(n) + o(1)$ /1
11. On a $y_n - n - \ln(n) = \ln(y_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{y_n}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$. /2

Problème C :

Résolvons l'équation différentielle linéaire $(E) : y^{(3)} - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.
Son équation homogène associée $(E_H) : y^{(3)} - 3y' + 2y = 0$ admet pour équation caractéristique $(E_c) : r^3 - 3r + 2 = 0$. On remarque que 1 est solution évidente de (E_c) puis on en déduit toutes les solutions de (E_c) : 1 (racine double) et -2. On montre que $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f_2 : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ et $f_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sont solutions de (E_H). La famille (f_1, f_2, f_3) est libre (à prouver en utilisant comme outil la limite en $-\infty$ puis l'évaluation en 0) et de cardinal 3. Par conséquent, c'est une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto Cx^2\mathrm{e}^x$ où $C \in \mathbb{R}$. On trouve par équivalence que y_p est solution de (E) si et seulement si $C = \frac{1}{6}$.
Conclusion :

$$S = \{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 x\mathrm{e}^x + \lambda_3 \mathrm{e}^{-2x} + \tfrac{1}{6}x^2\mathrm{e}^x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$